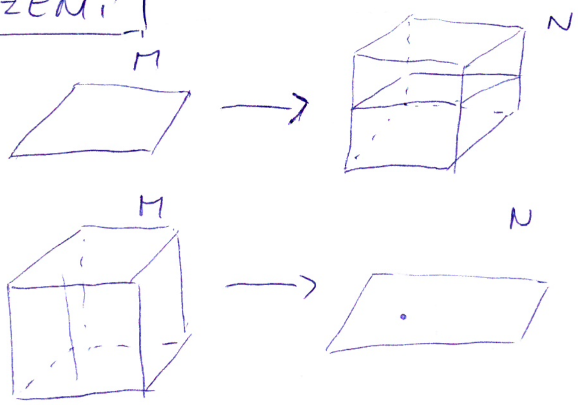
INDUKOVANÁ ZOBRAZENÍ

hladké $\phi : \underset{m}{M} \to \underset{n}{N}$ * dim.

$U, x \quad V, y$ * souř.

$\bar{\Phi} = y \circ \phi \circ x^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

* souřadnicové vyjádření musí být hladké



* nemusí být stejné dimenze

* toto je v podstatě definice podvariety (jedna varieta zobrazena do druhé, což vybírá podvarietu)

* nemusí mít ani inverzi (celé vlákno v M na bod v N)

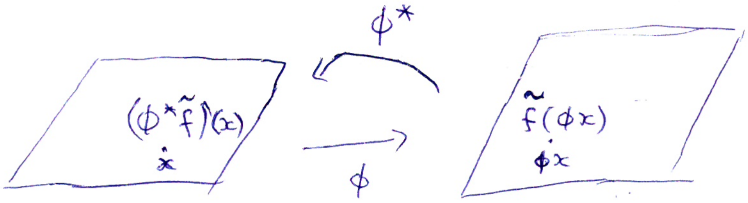
* budeme chtít indukovat zobrazení bodů na zobrazení dalších objektů (vektorů, forem, tenzorů, polí)

* vlnka bude značit objekt z cílové variety N

Def: pull-back fce

$$\phi^* : \tilde{\mathcal{F}}N \to \tilde{\mathcal{F}}M$$

$$\underbrace{(\phi^* \tilde{f})}_{f}(x) = \tilde{f}(\phi x)$$

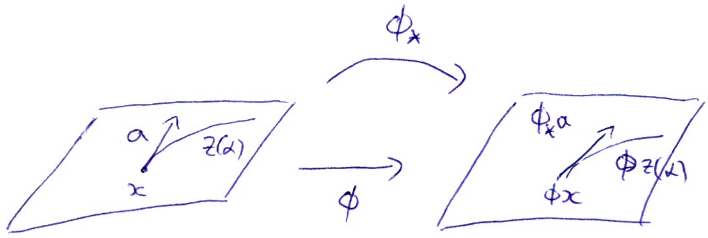


Def: push-forward vektoru

$$\phi_* : T_x M \to T_{\phi x} N$$

$$\underbrace{\phi_* \underbrace{\frac{Dz}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}}_{a}}_{\tilde{a}} = \frac{D\phi z}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}$$

* $z(\alpha)$ je křivka s teč. vekt. a



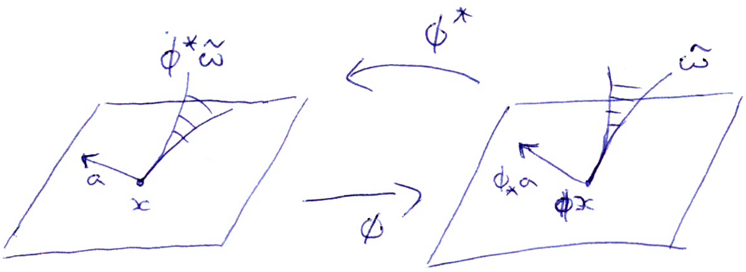
Def: pull-back kovektoru

$$\phi^* : T^*_{\phi x} N \to T^*_x M$$

$$\underbrace{(\phi^* \tilde{\omega})}_{\omega} \cdot a \Big|_x = \tilde{\omega} \cdot (\phi_* a) \Big|_{\phi x}$$

* když znám kontrakci s lib. vektorem a, tak znám kovektor ω

* je to původní kovektor $\tilde{\omega}$ působící na přenesený vektor $\phi_* a$



* platí:

$$(\phi_* a)\Big|_{\phi x}[\tilde f] = a|_x [\phi^* \tilde f]$$

* pře $(\phi_* a)\Big|_{z_0}[\tilde f] = \frac{D\phi z}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}[\tilde f] = \frac{d}{d\alpha}\tilde f(\phi z(\alpha))\Big|_{\alpha=0}$

$\left(a = \frac{Dz}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}\right) \quad = \frac{d}{d\alpha}(\phi^*\tilde f)(z(\alpha))\Big|_{\alpha=0} = a|_x[\phi^*\tilde f]$

* derivování $\tilde f$ podél přenesené křivky je derivování zpět přenesené fce podél původní křivky

$$\phi^*(d\tilde f|_{\phi x}) = d(\phi^*\tilde f)|_x$$

* působení na fce v předchozím nápisu pomocí grad.

$$a|_x \cdot \phi^*(d\tilde f|_{\phi x}) = (\phi_* a)|_{\phi x}\cdot d\tilde f|_{\phi x} = a|_x \cdot d(\phi^*\tilde f)|_x$$

předchozí vztah pomocí gradientu (na obou stranách)

pak jen utrhnu $a|_x$

* indukovaná zobr. jsou lineární

$\phi_*(a + rb) = \phi_* a + r\phi_* b, \; r\in\mathbb{R}$

$\phi^*(\tilde\alpha + r\tilde\beta) = \phi^*\tilde\alpha + r\phi^*\tilde\beta$

linearita

* protože při působení na $\tilde f$ dostanu $(a+rb)[\phi^* f]$

linearita

* zapůsobením na vektor u dostanu $(\tilde\alpha + r\tilde\beta)\cdot\phi_* u$

DIFERENCIÁL ZOBRAZENÍ

* lineární zobr. lze reprezentovat tenzorově (i na různých tenz. prostorech)

Def: $(\phi_* a)^{\tilde m} = (D\phi)\big|_x{}^{\tilde m}{}_{n}\, a^n$ $\qquad D\phi|_x \in T^*_x M \otimes T_{\phi x} N$ $\qquad$ * proto mám různé indexy

$(\phi^*\tilde\alpha)_n = (D\phi)\big|_x{}^{\tilde m}{}_{n}\,\tilde\alpha_{\tilde m}$

* dáno stejným tenzorem $D\phi$

$(\phi^*\tilde\alpha)\cdot a = \tilde\alpha\cdot(\phi_* a) = \tilde\alpha\cdot D\phi\cdot a$, utrhnu a

* POZOR: obecný tenzor obecně přesouvat neumím

- umím push-forwardovat horní indexy, když požaduju kontrakci s $\otimes$

$$(\phi_* A)^{\tilde a\tilde b\ldots} = D\phi^{\tilde a}{}_m\, D\phi^{\tilde b}{}_n \ldots A^{mn\ldots}$$

- umím pull-backovat dolní indexy ale ne push-forwardovat

* zkombinovat můžu jen když ϕ je difeomorfismus

difeomorphismus $\phi: M\to N$ (* bijekce, tzn. $m=n$)

ϕ i ϕ^{-1} hladké.

Def: push-forward kovektoru

$$\phi_*\alpha = \phi^{-1*}\alpha$$

* pak můžu rozšířit ϕ_* na obecný tenzor (kontrakce s $\otimes$)

$$(\phi\circ\psi)_* = \phi_*\circ\psi_* \quad\Rightarrow\quad D(\phi\circ\psi)|_x = D\phi|_{\phi x}\cdot D\psi|_x$$

souřadnice

$M \quad (U, \mathbf{x})$

$N \quad (V, \mathbf{y})$

* mapy

$$\bar\phi = \mathbf{y}\circ\phi\circ\mathbf{x}^{-1}$$

* souř. vyjádření ϕ

* komponenty zúžením s bází

$$D\phi = \frac{\partial\bar\phi^{\tilde k}}{\partial x^l}\, dx^l\, \frac{\partial}{\partial y^{\tilde k}}$$

$$dy^{\tilde k}\cdot D\phi\cdot\frac{\partial}{\partial x^l} = dy^{\tilde k}\cdot\phi_*\frac{\partial}{\partial x^l} = \left(\phi_*\frac{\partial}{\partial x^l}\right)[y^{\tilde k}] = \frac{\partial}{\partial x^l}[\phi^* y^{\tilde k}] = \frac{\partial\bar\phi^{\tilde k}}{\partial x^l}$$

* alternativně: "$(\phi^* dy^{\tilde k})\cdot\frac{\partial}{\partial x^l} = (d\,\phi^* y^{\tilde k})\cdot\frac{\partial}{\partial x^l}$"

→

$$(\phi_* T)^{\tilde a \dots}_{\tilde b \dots} = (D\phi)^{\tilde a}_{\underline m} \dots (D\phi^{-1})^{\underline n}_{\tilde b} \dots T^{\underline m \dots}_{\underline n \dots}$$

$$D\phi^{-1} \cdot D\phi = \delta_M \qquad D\phi \cdot D\phi^{-1} = \delta_N$$

spec. případy: $n=1$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "x^i"'] & N \arrow[l, shift left, "z"] \arrow[d, "\tau"] \\ \mathbb{R}^n & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\bar f = \overbrace{\tau \circ f}^{\text{fce na } M} \circ x^{-1}$$

$$\bar z = x \circ \underbrace{z \circ \tau^{-1}}_{\text{křivka na } M}$$

$$Df = \bar f_{,i}\, dx^i \frac{\partial}{\partial \tau} = d(\tau \circ f) \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$Dz = \frac{d\bar z^i}{d\tau} d\tau \frac{\partial}{\partial x^i} = d\tau \frac{D(z \circ \tau^{-1})}{d\tau}$$

* volbou τ mohu navíc identifikovat $N \simeq \mathbb{R} \simeq TN \simeq T^*N \Rightarrow Df \simeq df$ grad. fce, $Dz \simeq \frac{Dz}{d\tau}$ teč. v. křivky

* - umíme přenášet tenzory z bodu do bodu
- umíme navíc přenášet celé fce (zde jde zejména o přenos závislosti na bodu)

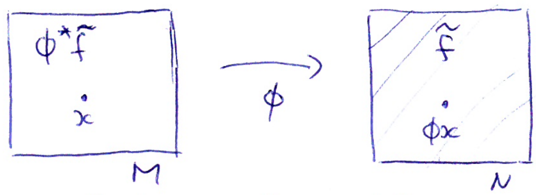
} kombinací se teď naučíme přenášet celá tenzorová pole

* speciální přenos z M do M celého pole nám umožní v daném bodě porovnat přenesený tenzor s původním

INDUKOVANÁ ZOBRAZENÍ NA POLÍCH

* připomeňme pull-back fcí, $\phi: M \to N$ hladké (ne diffeo)

Def: $\phi^*: \mathcal{F}N \to \mathcal{F}M$



$(\phi^* \tilde f)(x) = \tilde f(\phi x)$ * pull-backovaná fce je původní v přesunutém argumentu

* pro pole p-forem podobně, akorát $\tilde\omega(\phi x)$ je furt objekt z $T_{\phi x}{}^0_p N$, tak ho navíc musím přenést na $T_x{}^0_p M$ pomocí pull-backu formy

Def:

$$\phi^*: \mathcal{T}^0_p N \to \mathcal{T}^0_p M$$

$$(\phi^* \tilde\omega)(x) = \underbrace{\phi^*(\underbrace{\tilde\omega(\phi x)}_{\in T_{\phi x}{}^0_p N})}_{\in T_x{}^0_p M}$$

Lemma:

$$\phi^* d\tilde f = d \phi^* \tilde f$$

* teď formulováno pro pole, vyplývá z relace v bodě

* POZOR: vektorové pole nelze obecně podobně přenášet, když ϕ^{-1} neexistuje

diffeomorphisms $\phi: M \to N$

$$\phi_* = \phi^{-1*}$$

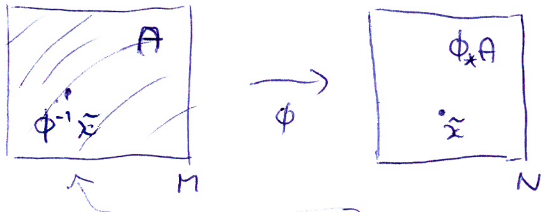
* pak mohu dělat push-forw. pro lib. tenzory a tudíž i pro lib. tenzorové pole

* na spodní indexy push-forward pomocí pull-backu inverze ϕ^{-1}

$(\phi_* A)(\tilde{x}) = \phi_*(A(\phi^{-1}\tilde{x}))$ (o)

* ekvivalentně $\tilde{x} = \phi x$

$(\phi_* A)(\phi x) = \phi_*(A(x))$ (+)



* potřebuji ϕ^{-1} zde a navíc pro ϕ_* dolních indexů

* podobně pull-back $\phi^* = \phi^{-1}_*$, $(\phi^*\tilde{A})(x) = \phi^*(\tilde{A}(\phi x))$

Vlastnosti: (* též pro tenzorové pole)

$$\left.\begin{aligned} &\phi_*(A + rB) = \phi_* A + r\,\phi_* B,\ r\in\mathbb{R} && \text{* linearita} \\ &\phi_*(AB) = (\phi_* A)(\phi_* B) && \text{* komutace s } \otimes \\ &\phi_*(\mathcal{C}A) = \mathcal{C}\,\phi_* A && \text{* komutace s } \mathcal{C} \end{aligned}\right\} \quad (\#)$$

* další vlastnosti pro vekt. pole:

$a[\phi^*\tilde{f}] = \phi^*((\phi_* a)[\tilde{f}])$ (•) * podobně jako předtím, extra ϕ^* vpravo se stará o vyhodnocení ve správném bodě

*důk: $(a[\phi^*\tilde{f}])(x) = a(x)[\phi^*\tilde{f}] = (\phi_*(a(x)))[\tilde{f}] = ((\phi_* a)(\phi x))[\tilde{f}] = (\phi_* a)[\tilde{f}]\big|_{\phi x} = \phi^*((\phi_* a)[\tilde{f}])(x)$

bylo; push-f. tenz. pole (+) (ϕ difeo.); pull-back fce

* aplikací ϕ_* a využitím $\phi_* = \phi^{-1*}$ převedu na tvar:

$\phi_*(a[\phi^*\tilde{f}]) = (\phi_* a)[\tilde{f}]$

* přejmenováním $f = \phi^*\tilde{f}$ dostanu

$\phi_*(a[f]) = (\phi_* a)[\phi_* f]$ * push-f. na celé je kombinace push-f. a a f

Věta: $\phi_*[a,b] = [\phi_* a, \phi_* b]$ * push-f. komutuje s Lie. z.

důk: * je výhodné počítat $\phi^*(\phi_*[a,b][\tilde{f}])$ a pak z výsledku odstranit ϕ^* a $\tilde{f}$

* důkaz je skrz opakované použití (•)

$$\phi^*((\phi_*[a,b])[\tilde{f}]) \overset{(\bullet)}{=} [a,b][\phi^*\tilde{f}] \overset{\text{def. Lie. z.}}{=} a[b[\phi^*\tilde{f}]] - a\leftrightarrow b \overset{(\bullet)}{=} a[\phi^*((\phi_* b)[\tilde{f}])] - a\leftrightarrow b$$

$$\overset{(\bullet)}{=} \phi^*((\phi_* a)[(\phi_* b)[\tilde{f}]]) - a\leftrightarrow b \underset{\text{def. Lie. z.}}{=} \phi^*([\phi_* a, \phi_* b][\tilde{f}])$$

$$\Rightarrow \underbrace{\phi_*[a,b]}_{\text{Lie. z. na } M} = \underbrace{[\phi_* a, \phi_* b]}_{\text{Lie. z. na } N}$$

TOKY A LIEOVA DERIVACE

Def: tok na M

= 1-par. grupa difeo. na M

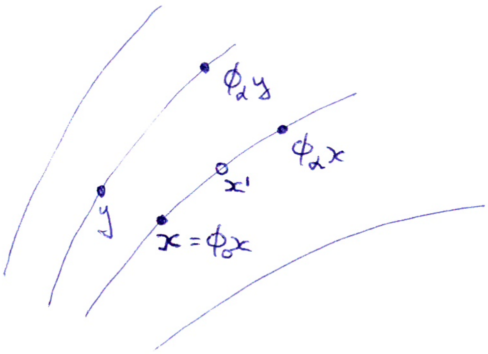
$\phi_\alpha \in \mathrm{Diff}\,M \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\phi_\alpha \circ \phi_\beta = \phi_{\alpha+\beta}$

$\Rightarrow \quad \phi_0 = id, \ \phi_{-\alpha} = \phi_\alpha^{-1}$ (* aby bylo konzistentní s aditivitou)

* je to několik zobrazení číslovaných $\alpha \in \mathbb{R}$ zobrazujících na stejné varietě (podgrupa Diff M)
* skládání je aditivní v α (abelovská grupa)

* změna parametru α reprezentuje tok na varietě
* pro každý bod $x \in M$ definuje orbitu $\phi_\alpha x, \ \alpha \in \mathbb{R}$



* když vezmu bod x' na orbitě x, tak mi generuje stejnou orbitu

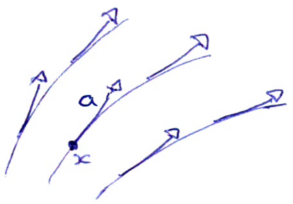
$$\phi_\alpha x' = \phi_\alpha \underbrace{\phi_\xi x}_{x' \text{ je na orbitě } x} = \phi_{\alpha+\xi} x$$

* tzn. všechny body na jedné orbitě se přesouvají v rámci orbity

Def: generátor toku

$$a\big|_x = \frac{D}{d\alpha} \phi_\alpha x \Big|_{\alpha=0}$$

* reprezentuje tok pro malé α vektorovým polem, konkrétně tečným vektorem k orbitě
* je to generátor protože ze znalosti vektorového pole lze najít integrální křivky (= tzn. i tok) řešením soustavy obyč. dif. rovnic prvního řádu, což existuje a je jednoznačné (tok $\leftrightarrow$ generátor je jednozn.)



Lemma

$\phi_{\alpha *} a = a$ * přenos generátoru podél toku bude přecházet na generátor

dk.: $$(\phi_{\alpha *} a)(\phi_\alpha x) \underset{(+)}{=} \phi_{\alpha *}(a(x)) = \phi_{\alpha *} \frac{D}{d\varepsilon} \phi_\varepsilon x \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{D}{d\varepsilon} \phi_\varepsilon \phi_\alpha x \Big|_{\varepsilon=0} = a(\phi_\alpha x)$$

přesunuté pole vyčíslené v posunutém bodě

def. generátoru

def. push-f. vektoru (* přesun tečného vektoru je tečný vektor přesunuté křivky)

kvůli $\phi_\alpha \phi_\varepsilon = \phi_\varepsilon \circ \phi_\alpha$

def. gen.

(* platí v každém $y = \phi_\alpha x$)

* generátor je diferenciální verze <u>toku</u> pro malé posunutí (= přenášení bodů variety)
* diferenciální verze <u>push-forwardu toku</u> bude Lieova derivace (= přenášení tenzor. polí)

LIEOVA DERIVACE

~~mo~~motivace

* intuitivně bychom derivaci tenzorové pole napsali jako

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(A(\underbrace{x+\varepsilon a}) - A(x)\right)$$

* musím nahradit křivkou x_ε ve směru a

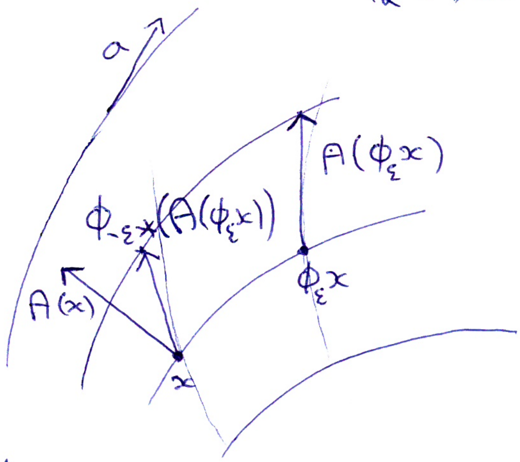
* problém: nelze odečíst tenzory v různých bodech (skaláry ano, viz derivace fce $a[f]$)
* na přenos tenzoru potřebuji dodatečnou strukturu = tok na M (nestačí pouze směr $a \in T_xM$, potřebuji celé vekt. pole $a \in TM$ generující tok)

Def: Lieova derivace

$\phi_\alpha \leftrightarrow a$

$$\mathcal{L}_a A\Big|_x = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(\phi_{-\varepsilon *}(A(\phi_\varepsilon x)) - A(x)\right)$$

(* A obecné tenz. pole, ale kreslím vektor)



* vektor v bodě $\phi_\varepsilon x$ přesunu zpět do bodu x pomocí pull-backu ($\phi_\varepsilon^* = \phi_{-\varepsilon *}$) a porovnám s vektorem v bodě x

* vektor se pull-backuje tak že přesunu body křivky k níž je tečný (proto "končí" zase na stejné sousední orbitě)

ekvivalentně:

$$\mathcal{L}_a A\Big|_x = \frac{d}{d\varepsilon}\phi_{-\varepsilon *}(A(\phi_\varepsilon x))\Big|_{\varepsilon=0}$$

* obsahuje push-f. tenzoru v bodě

* mohu dál přepsat na push-f. tenz. pole pomocí (o) a předefinování $\varepsilon \to -\varepsilon$, po zahození ~~ar~~argumentu x dostanu

$$\mathcal{L}_a A = -\frac{d}{d\varepsilon}\phi_{\varepsilon *}A\Big|_{\varepsilon=0}$$

* tzn. $\mathcal{L}_a$ je diferenciální verze push-f. (tzn. jak se chová $\phi_{\varepsilon *}$ na tenz. polích pro malé ε)

Věta: platí

(i) $\phi_{\alpha *} \circ \phi_{\beta *} = \phi_{\alpha+\beta *}$

(ii) $\phi_{0*} = id$

(iii) $\dfrac{d}{d\alpha}\phi_{\alpha *} = -\phi_{\alpha *}\mathcal{L}_a$

(* operátorově)

důk (iii):

$$-\phi_{\alpha *}\mathcal{L}_a = \phi_{\alpha *}\frac{d}{d\varepsilon}\phi_{\varepsilon *}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\phi_{\alpha+\varepsilon *}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\alpha}\phi_{\alpha *}$$

* toto jsou definiční vlastnosti exponenciály (násobení je sčítání argumentů, v nule je jednička, derivace je úměrná fci)

$$\phi_{\alpha *} = \exp\left[-\alpha\mathcal{L}_a\right]$$

(* lze ukázat, že splňuje Taylor rozvoj operátorů, atd.)

* tzn. generátor akce na tenz. polích (= Lie. der.) generuje zpět akci (= push-f)
* definice $\mathcal{L}_a$ nepraktická pro výpočty, počítá se z vlastností

vlastnosti:

$$\left.\begin{aligned}&\mathcal{L}_u(A+rB)=\mathcal{L}_uA+r\mathcal{L}_uB,\ r\in\mathbb{R}\\&\mathcal{L}_u(AB)=(\mathcal{L}_uA)B+A\mathcal{L}_uB\\&\mathcal{L}_u(\mathsf{C}A)=\mathsf{C}\mathcal{L}_uA\end{aligned}\right\}$$

$\mathcal{L}_u$ je tenzorová derivace

* vyplývá z (#), v důk. Leibnize je třeba rozvoj do prvního řádu v ε

$\mathcal{L}_uf=u[f],\quad f\in\mathcal{F}M$ * zredukuje se přímo na definici $u[f]$

$\mathcal{L}_udf=d\mathcal{L}_uf$ * pze ϕ_* komutuje s d

$\mathcal{L}_u(a\cdot\omega)=(\mathcal{L}_ua)\cdot\omega+a\cdot\mathcal{L}_u\omega,\quad \omega\in\Omega^pM$ * vyplývá z druhého a třetího řádku

$\mathcal{L}_uv=[u,v]$

důk (poslední řádek): * začnu počítáním $\mathcal{L}_u(v\cdot df)$

$$\mathcal{L}_u(\underbrace{v\cdot df}_{\text{fce}})=u[v\cdot df]=\underbrace{u\cdot d(v\cdot df)}_{\text{pomocí grad.}}$$

*současně $=(\mathcal{L}_uv)\cdot df+v\cdot\mathcal{L}_udf=(\mathcal{L}_uv)\cdot df+v\cdot d(u\cdot df)$

* šestý řádek $\omega=df$

* pátý + čtvrtý řádek $\mathcal{L}_udf=d\mathcal{L}_uf=d(u\cdot df)$

* vyjádřením

$$(\mathcal{L}_uv)\cdot df=u\cdot d(v\cdot df)-v\cdot d(u\cdot df)=[u,v]\cdot df$$

zápis Lie. z. pomocí grad

* utrhneme df

Věta:

$\mathcal{L}_a$ je určená vlastnostmi

důk: tenz. der. $\Rightarrow$ určená akcí na $\mathcal{F}M$ a $\mathcal{T}M$

na $\mathcal{F}M$ … $u[\ ]$, na $\mathcal{T}M$ … $[u,\ ]$

Věta:

1) $\mathcal{L}_{u+rv}=\mathcal{L}_u+r\mathcal{L}_v,\quad r\in\mathbb{R}$

2) $\mathcal{L}_{fu}=f\mathcal{L}_u+\mathsf{L}$ * není ultralokální (nelze reprezentovat tenzorově $\Rightarrow$ nelze utrhnout u a zavést diferenciál)

L je pseudo der.

generovaná $L=-u\,df$ * pozor: $L^m{}_n=-u^m d_nf\in\mathcal{T}^1_1M$

3) $\mathcal{L}_{[u,v]}=\mathcal{L}_u\mathcal{L}_v-\mathcal{L}_v\mathcal{L}_u$

* neultralokálnost znamená, že na u závisí netriviálně
($u = f\tilde{u} \Rightarrow$ potřebuji znát df, tzn. změnu f),
tzn. tok (a tedy i u) je třeba znát všude (ne pouze na jedné orbitě),
znalost u v okolních orbitách je potřeba pro push-f. v definici $\mathcal{L}$

důk: 1) * zadefinuju:

$$\mathbf{M} := \mathcal{L}_{u+rv} - \mathcal{L}_u - r\mathcal{L}_v, \quad \mathbf{M} \text{ je tenz. der. (pže } \mathcal{L}_a \text{ je tenz. der.)}$$

$$\mathbf{M} f = (u+rv)[f] - u[f] - rv[f] = 0$$

$$\mathbf{M} w = [u+rv, w] - [u,w] - r[v,w] = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{M} = 0$$

2) $\mathbf{L} = \mathcal{L}_{fu} - f\mathcal{L}_u$, $\mathbf{L}$ je tenz. der. (pže $\mathcal{L}_a$ je tenz. der.)

$$\mathbf{L} h = (fu)[h] - fu[h] = 0$$

$$\mathbf{L} v = [fu, v] - f[u,v] = \cancel{f[u,v]} - u[f]v - \cancel{f[u,v]} = \underbrace{(-u\,df)}_{L} \cdot v$$

3) * označím:

$$\mathbf{N} = \mathcal{L}_{[u,v]} - (\mathcal{L}_u\mathcal{L}_v - \mathcal{L}_v\mathcal{L}_u)$$

$\mathbf{N}$ je tenz. der.: - linearita a kom. s C zřejmá
- Leibniz: stačí pro $\mathcal{L}\mathcal{L} - \mathcal{L}\mathcal{L}$

$$[\mathcal{L}_u\mathcal{L}_v - \mathcal{L}_v\mathcal{L}_u](AB) = \mathcal{L}_u((\mathcal{L}_v A)B + A\mathcal{L}_v B) - u \leftrightarrow v$$

$$= (\mathcal{L}_u\mathcal{L}_v A)B + \cancel{(\mathcal{L}_v A)(\mathcal{L}_u B) + (\mathcal{L}_u A)(\mathcal{L}_v B)} + A\mathcal{L}_u\mathcal{L}_v B - u \leftrightarrow v$$

(po $-u\leftrightarrow v$)

$$= ([\mathcal{L}_u\mathcal{L}_v - \mathcal{L}_v\mathcal{L}_u]A)B + A([\mathcal{L}_u\mathcal{L}_v - \mathcal{L}_v\mathcal{L}_u]B)$$

$$\mathbf{N} f = [u,v][f] - (u[v[f]] - v[u[f]]) = 0 \quad \text{def. Lie z.}$$

$$\mathbf{N} w = [[u,v],w] - ([u,[v,w]] - [v,[u,w]]) = 0 \quad \text{Jacobi id.}$$

$$\Rightarrow \mathbf{N} = 0$$

př: neultralokalita, působení na $\alpha \in T^*M$

$$\mathcal{L}_{fu}\alpha = f\mathcal{L}_u\alpha + \underbrace{df\,(u\cdot\alpha)}_{-(-u^m d_n f)\alpha_m}$$

* v indexech

Věta: $\mathcal{L}_w[u,v] = [\mathcal{L}_w u, v] + [u, \mathcal{L}_w v]$

důk: $[w,[u,v]] = [[w,u],v] + [u,[w,v]] \Leftarrow$ Jacob. id.

Věta:

$$\left(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^c}} A\right)^{a\dots}_{b\dots} = A^{a\dots}_{b\dots;c}$$

vůči x^a

důk:

$$\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^c}} A = \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^c}}\left(A^{a\dots}_{b\dots}\frac{\partial}{\partial x^a}\dots dx^b\dots\right) = \overbrace{\left(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^c}} A^{a\dots}_{b\dots}\right)}^{A^{a\dots}_{b\dots;c}}\frac{\partial}{\partial x^a}\dots dx^b\dots$$

linearita, Leibniz, $\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^c}}\frac{\partial}{\partial x^a} = \left[\frac{\partial}{\partial x^c}, \frac{\partial}{\partial x^a}\right] = 0$, $\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^c}} dx^b = d\,\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^c}} x^b = d\underbrace{x^b_{;c}}_{\delta^b_c} = 0$

LIEOVA DER. ANTISYM FOREM

* pro anti-sym. několik vlastností navíc, (hlavně Cart. id. pro lehčí počítání)

Vlastnosti

$$\mathcal{L}_a : \Omega^p M \to \Omega^p M \quad \text{nemění stupeň}$$

$$\mathcal{L}_a(\omega+\sigma) = \mathcal{L}_a\omega + \mathcal{L}\sigma$$

$$\mathcal{L}_a(\omega\wedge\sigma) = (\mathcal{L}_a\omega)\wedge\sigma + \omega\wedge\mathcal{L}_a\sigma$$

* z Leibnize na tenzorech a definice $\wedge$ pomocí $\mathcal{A}$, (neobsahuje extra znaménko narozdíl od Leibnize d a i_a)

$$\mathcal{L}_a f = a[f], \quad f\in\mathcal{F}M$$

$$\mathcal{L}_a df = d\mathcal{L}_a f$$

Věta:
vlastnosti určují $\mathcal{L}_a$ na $\Omega^p M$ jednoznačně

* důk: rozepíšem ω do báze lze vždy dopočítat z vlastností

Věta: Cartanova identita * nejužitečnější vzorec pro výpočet $\mathcal{L}_a\omega$

$$\mathcal{L}_a\omega = a\cdot d\omega + d(a\cdot\omega)$$

* převádí $\mathcal{L}_a$ na d

* ekvivalentně

$$\mathcal{L}_a = i_a d + d i_a$$

důk: * varianta 1: indukce přes stupeň

$p=0$ $\quad \mathcal{L}_a f = a\cdot df + d(\cancel{a\cdot f})^{0}$

$p\to p+1$ $\quad \omega\in\Omega^{p+1}M$ lze zapsat jako suma členů $df\wedge\alpha$, $\alpha\in\Omega^p M$

$$\mathcal{L}_a(df\wedge\alpha) = (d\mathcal{L}_a f)\wedge\alpha + df\wedge\mathcal{L}_a\alpha$$
$$= (d(a\cdot df))\wedge\alpha + df\wedge(a\cdot d\alpha) + df\wedge d(a\cdot\alpha)$$
$$= d((a\cdot df)\wedge\alpha) - (a\cdot df)d\alpha - a\cdot(df\wedge d\alpha) + (a\cdot df)d\alpha - d(df\wedge(a\cdot\alpha))$$
$$= d(a\cdot(df\wedge\alpha)) + \cancel{d(df\wedge(a\cdot\alpha))} + a\cdot d(df\wedge\alpha) - \cancel{d(df\wedge(a\cdot\alpha))}$$
$$= a\cdot d(df\wedge\alpha) + d(a\cdot(df\wedge\alpha))$$

* varianta 2: $i_a d + d i_a$ splňuje definiční vlastnosti $\mathcal{L}_a$
  * z vlastností je netriviální pouze Leibniz
  * aplikujme $i_a d + d i_a$ na $\omega\wedge\sigma$

$$a\cdot d(\omega\wedge\sigma) + d(a\cdot(\omega\wedge\sigma))$$

* ω je p-forma, použiju Leibniz pro d a pro i_a

$$= a\cdot(d\omega\wedge\sigma + (-1)^p\omega\wedge d\sigma)$$
$$+ d((a\cdot\omega)\wedge\sigma + (-1)^p\omega\wedge(a\cdot\sigma))$$

* znovu Leibniz pro d a i_a

$$= (a\cdot d\omega + d(a\cdot\omega))\wedge\sigma + (-1)^{2p}\omega\wedge(a\cdot d\sigma + d(a\cdot\sigma))$$
$$+ \cancel{(-1)^{p+1}d\omega\wedge(a\cdot\sigma)} + \cancel{(-1)^p(a\cdot\omega)\wedge d\sigma} + \cancel{(-1)^{p-1}(a\cdot\omega)\wedge d\sigma} + \cancel{(-1)^p d\omega\wedge(a\cdot\sigma)}$$

Věta: $\mathcal{L}_a d = d\mathcal{L}_a$ (* bylo pro grad. fce)

důk:
$$\mathcal{L}_a d\omega \underset{\text{Cart. id.}}{=} a\cdot \cancel{dd\omega} + d(a\cdot d\omega) \overset{\text{přidám } dd(a\cdot\omega)=0}{=} d(a\cdot d\omega + d(a\cdot\omega)) \underset{\text{Cart. id.}}{=} d\mathcal{L}_a\omega$$

Věta: $\mathcal{L}_a i_b - i_b \mathcal{L}_a = i_{[a,b]}$ (* komutátor $\mathcal{L}_a$ a i_b)

důk: * počítám první člen

$$\mathcal{L}_a i_b \omega = \mathcal{L}_a (b\cdot\omega) \underset{\text{Leibniz}}{=} (\mathcal{L}_a b)\cdot\omega + b\cdot\mathcal{L}_a\omega = \underbrace{[a,b]\cdot\omega}_{i_{[a,b]}\omega} + i_b \mathcal{L}_a \omega$$

Věta: $\mathcal{L}_{fa}\omega = f\mathcal{L}_a\omega + df\wedge(a\cdot\omega)$ (* neultralokalita ve verzi pro formy)

(* bylo pro 1-formu v příkladu)

důk: * varianta 1: z akce pseudoderivace L na $\Omega^p M$

* varianta 2: jednodušeji pomocí Cart. id.

$$\mathcal{L}_{fa}\omega \underset{\text{Cart. id.}}{=} fa\cdot d\omega + d(fa\cdot\omega) \underset{\substack{\text{Leibniz} \\ \text{na druhý člen}}}{=} f\,a\cdot d\omega + f\,d(a\cdot\omega) + df\wedge(a\cdot\omega)$$

$$\underset{\substack{\text{Cart. id} \\ \text{v prvních dvou}}}{=} f\mathcal{L}_a\omega + df\wedge(a\cdot\omega)$$

* bude: - vztah Lieovy a kovariantní der.
- Lieova der. integrovatelné hustoty

* bonus: interpretace Lie. závorky (možná u podvariet)

Př METRIKA INDUKOVANÁ NA PODVARIETU

* podvarietu jsme nedefinovali, ale už v podstatě umíme vše co je potřeba
* podvarieta se zadává zobrazením:

vnoření

$\iota : N \to M$

dim 2   dim 3

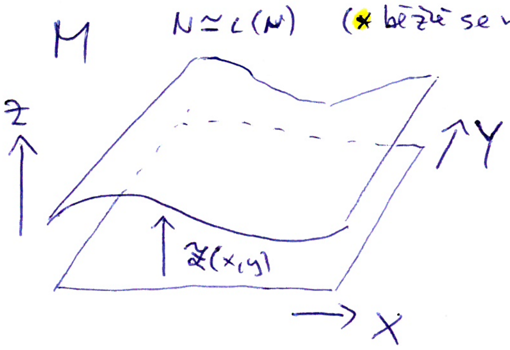
souř.: x, y X, Y, Z

* zadáme předpisem

$X = x$

$Y = y$

$Z = \mathcal{Z}(x, y)$

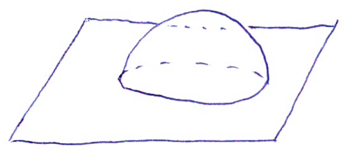


* metrika na M (plochá)

$$g = dXdX + dYdY + dZdZ$$

např. polosféra:

$$\mathcal{Z}(x,y) = \sqrt{R_0^2 - x^2 - y^2}$$



1) spočtěte $D\iota$ a $g|_N = \iota^* g$ pro obecné $\mathcal{Z}(x,y)$

$$D\iota = \frac{\partial X^K}{\partial x^l} dx^l \frac{\partial}{\partial X^K}$$

$$= dx \frac{\partial}{\partial X} + dy \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial x} dx \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial y} dy \frac{\partial}{\partial Z}$$

$$g|_{N\,\underline{ab}} = (D\iota)^{\underline{A}}_{\underline{a}} (D\iota)^{\underline{B}}_{\underline{b}} g_{\underline{AB}}$$

$$= d_{\underline{a}} x\, d_{\underline{b}} x + d_{\underline{a}} y\, d_{\underline{b}} y + \left(\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial x} d_{\underline{a}} x + \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial y} d_{\underline{a}} y\right)\left(\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial x} d_{\underline{b}} x + \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial y} d_{\underline{b}} y\right)$$

$$\Rightarrow \quad g|_N = \left(1 + \left(\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial x}\right)^2\right) dx dx + \left(1 + \left(\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial y}\right)^2\right) dy dy + \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial y}\, dx \vee dy$$

2) spočtěte $D\iota$ a $g|_N$ pro polosféru ve sfér. souř.

$X = R \sin\Theta \cos\Phi$ $\iota : N \to M$ $R = R_0 = \text{konst}$

$Y = R \sin\Theta \sin\Phi$ ϑ, φ R, Θ, Φ $\Theta = \vartheta$

$Z = R \cos\Theta$ $\Phi = \varphi$

$$g = dRdR + R^2(d\Theta d\Theta + \sin^2\Theta\, d\Phi d\Phi)$$

$$D\iota = d\vartheta \frac{\partial}{\partial \Theta} + d\varphi \frac{\partial}{\partial \Phi}$$

$$g|_N = R_0^2(d\vartheta d\vartheta + \sin^2\vartheta\, d\varphi d\varphi)$$

pozn: $\iota^* dR = 0$, $\iota^* d\Theta = d\vartheta$, $\iota^* d\Phi = d\varphi$

Př ROTAČNĚ SYMETRICKÁ PLOCHA (=TRUBICE) + TOK

vnoření

$\iota : N \to M$

dim 2 dim 3

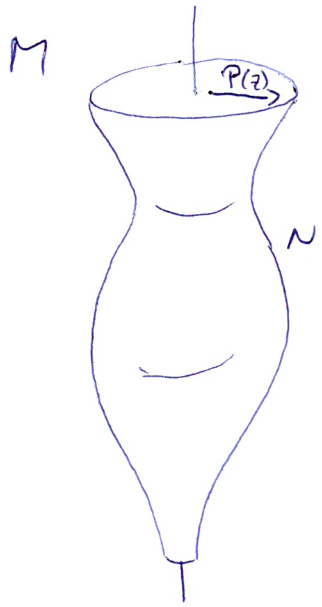
$z\ \varphi \quad P\, Z\, \Phi$

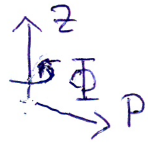
* zadané jako

$Z = z$

$\Phi = \varphi$

$P = P(z)$





* metrika na M (plochá)

$$g = dP\,dP + dZ\,dZ + P^2 d\Phi\, d\Phi$$

1) spočtěte $q = g|_N = \iota^* g$

$$D\iota = \frac{\partial X^k}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial X^k} dx^l$$

$$= P' \frac{\partial}{\partial P} dz + \frac{\partial}{\partial Z} dz + \frac{\partial}{\partial \Phi} d\varphi$$

$$q_{\underline{ab}} = (D\iota)^{\underline{A}}_{\underline{a}} (D\iota)^{\underline{B}}_{\underline{b}}\, g_{\underline{AB}}$$

$$\Rightarrow q = P'^2 dz\,dz + dz\,dz + P^2 d\varphi\, d\varphi$$

$$= (1 + P'^2) dz\,dz + P^2 d\varphi\, d\varphi$$

pozn: efektivně $dP = P'dz$, $dZ = dz$, $d\Phi = d\varphi$ při $\iota^* dX^k = \frac{\partial X^k}{\partial x^l} dx^l$

2) spočtěte $\pounds_{\frac{\partial}{\partial z}} q$

$$\pounds_{\frac{\partial}{\partial z}} q = \pounds_{\frac{\partial}{\partial z}} \left((1+P'^2) dz\,dz + P^2 d\varphi\, d\varphi \right) = 2P'P'' dz\,dz + 2P'P\, d\varphi\, d\varphi$$

* jen derivace komponent

$$\pounds_{\frac{\partial}{\partial x^k}} dx^l = d\delta^l_k = 0, \quad \pounds_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^l} = \left[\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right] = 0$$

3) kdy je $\frac{\partial}{\partial z}$ Killingův vektor (=symetrie)?

$$\pounds_{\frac{\partial}{\partial z}} q = 0 \iff P' = 0 \iff P = P_0 = \text{konst} \quad \text{tj. válec}$$

4) kdy je $\frac{\partial}{\partial z}$ konformní Kill. vekt. (= konf. symetrie)?

$$\pounds_{\frac{\partial}{\partial z}} q = \alpha q \iff \begin{aligned} 2P'P'' &= \alpha(1+P'^2) \\ 2P'P &= \alpha P^2 \end{aligned} \xrightarrow{\text{nutně}} PP'' = 1 + P'^2$$

* vydělím

řeší např.: $P = \cosh z$

$$\Rightarrow \alpha = 2\frac{P'}{P} = 2\tanh z$$

(obecně: $P = \frac{1}{a}\cosh(az+b)$)

tzn. $q = \cosh^2 z\,(dz\,dz + d\varphi\, d\varphi)$

5) najděte tok generovaný $\frac{\partial}{\partial z}$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_x = \left.\frac{D}{d\xi} U_\xi x\right|_{\xi=0} = \left.\frac{d}{d\xi} z(U_\xi x)\right|_{\xi=0} \frac{\partial}{\partial z} + \left.\frac{d}{d\xi} \varphi(U_\xi x)\right|_{\xi=0} \frac{\partial}{\partial \varphi} \iff \begin{aligned} z(U_\xi x) &= z(x) + \xi \\ \varphi(U_\xi x) &= \varphi(x) \end{aligned}$$

souř. vekt. tečného k $x(\xi)$

$$V^a = V[x^a] = \left.\frac{D}{d\xi} x(\xi)\right|_{\xi=0} [x^a]$$

$$= \left.\frac{d}{d\xi} x^a(x(\xi))\right|_{\xi=0}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} U^*_\xi z &= z + \xi \\ U^*_\xi \varphi &= \varphi \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} U_{\xi *} z &= z - \xi \\ U_{\xi *} \varphi &= \varphi \end{aligned}$$

6) nalezněte posunutou metriku $u_{\xi *} q$ pro q z 4)

$$(u_{\xi *} q)\big|_{z,\varphi} = U_{\xi *}\big(\underbrace{q\big|_{z-\xi,\varphi}}_{\text{tj. } q(u_\xi^{-1}x) = q(u_{-\xi}x)}\big)$$

$$\Big|\ U_{\xi *}\, dz = d\, U_{\xi *} z = dz$$

$$\Big|\ U_{\xi *}\, d\varphi = d\, U_{\xi *} \varphi = d\varphi$$

$$\Big|\ \text{alternativně: } (DU_\xi)^a_{\ b} = \frac{\partial x^a(U_\xi x)}{\partial x^b(x)} = \delta^a_b$$

$$= \cosh^2(z-\xi)(dz\,dz + d\varphi\, d\varphi)$$

komutace s $\otimes$

$$= \left(\frac{\cosh(z-\xi)}{\cosh z}\right)^2 q \;=:\; \Omega_\xi^2\, q$$

7) spočtěte $\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial z}} q$ z definice

$$\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial z}} q = -\frac{d}{d\xi} U_{\xi *} q\Big|_{\xi=0} = -\frac{d}{d\xi}\left(\Omega_\xi^2 q\right)\Big|_{\xi=0} = -2\,\Omega_\xi \frac{d\Omega_\xi}{d\xi}\Big|_{\xi=0} q = \underbrace{2\tanh z}_{=\alpha}\, q$$

PŘ KILLINGOVY VEKTORY NA S^2

$$g = d\vartheta\, d\vartheta + \sin^2\vartheta\, d\varphi\, d\varphi$$

$$X = -\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\vartheta} - \cos\varphi \cot\vartheta \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$Y = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\vartheta} - \sin\varphi \cot\vartheta \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

spočtěte $\mathcal{L}_X g,\ \mathcal{L}_Y g,\ \mathcal{L}_Z g$

$$\mathcal{L}_a g = \mathcal{L}_a (d\vartheta\, d\vartheta + \sin^2\vartheta\, d\varphi\, d\varphi)$$

$$= (\mathcal{L}_a d\vartheta) \vee d\vartheta + (\mathcal{L}_a \sin^2\vartheta)\, d\varphi\, d\varphi + \sin^2\vartheta (\mathcal{L}_a d\varphi) \vee d\varphi$$

$$= d(a[\vartheta]) \vee d\vartheta + a[\sin^2\vartheta]\, d\varphi\, d\varphi + \sin^2\vartheta (d(a[\varphi])) \vee d\varphi$$

$$d(X[\vartheta]) = d(-\sin\varphi) = -\cos\varphi\, d\varphi$$

$$X[\sin^2\vartheta] = -2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi$$

$$d(X[\varphi]) = d(-\cos\varphi\cot\vartheta) = \sin\varphi\cot\vartheta\, d\varphi + \frac{\cos\varphi}{\sin^2\vartheta} d\vartheta$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_X g = \cancel{-\cos\varphi\, d\varphi \vee d\vartheta} \cancel{-2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\, d\varphi d\varphi}$$

$$+ \cancel{\sin\varphi \sin\vartheta\cos\vartheta\, \underbrace{d\varphi \vee d\varphi}_{2 d\varphi d\varphi}} + \cancel{\cos\varphi\, d\vartheta \vee d\varphi} = 0$$

$\mathcal{L}_Y g$ podobně (pozn: $\varphi = \tilde\varphi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\sin\varphi = \cos\tilde\varphi,\ \cos\varphi = \cos\tilde\varphi$
$g = d\vartheta d\vartheta + \sin^2\vartheta\, d\tilde\varphi\, d\tilde\varphi$)

$$\mathcal{L}_Z g = \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial\varphi}} g = \underbrace{g_{ab,\varphi}}_{=0} dx^a dx^b \qquad x = (\vartheta, \varphi)$$

pro $g_{\vartheta\vartheta} = 1 \quad g_{\varphi\varphi} = \sin^2\vartheta$